Suites

Suite : (u_n), fonction qui à un entier n associe un nb réel noté u_n

Relation de récurrence : premier terme u_p avec relation pour déterminer les termes suivants, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $[p;+\infty[$

Formule explicite : calcul des termes à partir de la formule $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[p;+\infty[$

Représentation graphique de (u_n) :
Formule explicite : ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$
Formule de récurrence :

Sens de variation :
- croissante à partir de p si pr tt entier $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante à partir de p si pr tt entier $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$
- monotone à partir de p si elle est soit croissante soit décroissante
- constante à partir de p si pr tt entier $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$

Croissante	Décroissante
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si $u_n > 0$ f est croissante sur $[p;+\infty[$	$u_{n+1} - u_n \leq 0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ si $u_n > 0$ f est décroissante sur $[p;+\infty[$

Suite arithmétique :

Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ avec r, la raison

Formule explicite : $u_n = u_0 + nr$ $[u_n = u_p + (n-p)r]$

Sens de variation :
- croissante si $r > 0$
- décroissante si $r < 0$
- monotone si $r = 0$

Représentation graphique : les points sont alignés, droite d'équation $y = rx + u_0$

Sommes : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n-1)}{2}$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2} = nb\ de\ termes \times \frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2}$

Suite géométrique (q^n) :

Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n q$ avec q, la raison

Formule explicite : $u_n = u_0 q^n$ $[u_n = u_p + q^{n-p}]$

Sens de variation :
- croissante si $q > 1$
- décroissante si $0 < q < 1$
- monotone si $q = 1$

Représentation graphique : les points ne sont pas alignés

Somme : $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = [u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}]$

Limites de suites géométriques :
- Si $q > 1$: $\lim_{n\to+\infty} (q^n) = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n\to+\infty} (q^n) = 0$
- Si $q \leq 1$: (q^n) n'admet pas de limite

Suite majorée : $u_n \leq M$, M un réel

Suite minorée : $u_n \geq m$, m un réel

Suite bornée : $m \leq u_n \leq M$, M et m des réels

Algorithme :

Initialisation	**TI**	**Casio**
N prend la valeur ...	Input S	"S" : ? → S
U prend la valeur ...	0 → n	0 → n
Traitement	u_0 → u	u_0 → u
Tant que ...	While u > S	While u > S
N prend la valeur ...	n+1 → n	n+1 → n
U prend la valeur ...	u_{n+1} → u	u_{n+1} → u
Fin tant que	End	WhileEnd
Sortie	Disp n	n
Afficher ...		

Raisonnement par récurrence :
Soit P(n), une propriété qui dépend d'un entier n et n_0 un entier
Pour montrer que P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$, on doit vérifier :
- L'initialisation : que la propriété est vraie au rang n_0 (pour $n = n_0$)
- L'hérédité : que si la propriété est vraie au rang n alors elle l'est aussi au rang $n + 1$
- Conclusion : propriété est intialiasée, héréditaire, elle est alors vraie pour tout $n \geq n_0$

Inégalité de Bernouilli :
Pour tt n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Limites :
Limite finie :
- u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$: tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N
- On dit que u_n converge vers ℓ, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
- la limite ℓ est unique

Limite infinie :
- u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N, càd pour tout $n \geq N$, $u_n > A$
- u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$: tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N, càd pour tout $n \geq N$, $u_n < A$
- On dit que u_n diverge

Limites des suites usuelles :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty \ \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \ \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Opérations sur les limites : u converge vers ℓ, v converge vers ℓ'
- $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$
- $u \times v$ converge vers $\ell \times \ell'$
- $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Fome indéterminée : factoriser ou développer pour trouver la limite
$0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $+\infty + (-\infty)$; $\frac{0}{0}$

Théorème de minorartion par $+\infty$:
- u et v deux suites tq $u_n \leq v_n$, pour tout n à partir d'un certain rang
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorème de majorartion par $+\infty$:
- u et v deux suites tq $u_n \leq v_n$, pour tout n à partir d'un certain rang
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Théorème des gendarmes :
- u, v, w deux suites tq $u_n \leq v_n \leq w_n$,
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Convergence des suites monotones majorées ou minorées :
- Toute suite croissante et majorée admet une limite finie
- Toute suite décroissante et minorée converge admet une limite finie

Théorème : u une suite qui converge vers un réel ℓ
u est majorée par ℓ, càd que pour tout n ; $u_n \leq \ell$