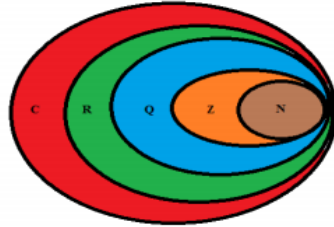


## Nombres complexes

### Ensemble des nombres :

- Entiers naturels  $\mathbb{N}$  (entiers positifs)
- Entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  (entiers positifs et négatifs)
- Nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  (fraction de la forme  $\frac{p}{q}$ )
- Nombres réels  $\mathbb{R}$
- Nombres complexes  $\mathbb{C}$



### Ensemble des nombres complexes :

Ensemble  $\mathbb{C}$  qui contient l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  en ajoutant un nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$

### Forme algébrique :

$z = x + iy$  avec  $x$ , la partie réelle  $\Re(z)$  et  $y$ , la partie imaginaire  $\Im(z)$

**Deux nombres complexes égaux :** ssi ils ont la même partie réelle et imaginaire

$$z = z' \Leftrightarrow \Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) = \Im(z')$$

### Conjugué d'un nombre complexe :

$$\bar{z} = x - iy \text{ avec } \Re(z) = \Re(\bar{z}) \text{ et } \Im(z) = -\Im(\bar{z})$$

### Propriétés :

- $z$  est un réel pur :  $z = \bar{z}$ ,  $\Im(z) = 0$
- $z$  est un imaginaire pur :  $z = -\bar{z}$ ,  $\Re(z) = 0$

### Les puissances de $i$ :

$$\begin{aligned} i &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 i = -i \\ i^4 &= i^2 i^2 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n$ ,  $i^{4n} = 1$

### Somme et produit :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

### Identités remarquables :

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

$$(x + iy)(x - iy) = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

**Inverse et quotient :** multiplier par le conjugué du dénominateur

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}$$

### Opérations et conjugué :

$$z + \bar{z}' = \bar{z} + z'$$

$$\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

**Equations du second degré :**  $az^2 + bz + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• Si  $\Delta < 0$  :  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

• Si  $\Delta > 0$  :  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si  $\Delta = 0$  :  $z_0 = \frac{-b}{2a}$

**Affixes :** soit  $z = x + iy$

- son image : point  $M(x; y)$ ,  $M(z)$
- affixe du point M :  $z_M = x + iy$
- $z$  et  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- $z$  et  $-z$  sont symétriques par rapport à l'origine
- $z$  et  $-\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ :  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- Affixe du milieu I du segment [AB] :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

**Modules de z :** M, image de z

- Module :  $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|-z| = |\bar{z}| = |z|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$|z|^n = |z^n|$$

**Argument de z :**

- Argument :  $\arg(z)$ , mesure en radian de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  ( $2\pi$ )

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

$$z \text{ est un réel pur ssi } \arg(z) = 0 \quad (\pi)$$

$$z \text{ est un imaginaire pur ssi } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

**Forme trigonométrique :** M, un point d'affixe de  $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad r = |z| \text{ et } \alpha = \arg(z) \quad (2\pi)$$

$$\boxed{z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

**Notation exponentielle :** soit  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$$\boxed{z = r e^{i\alpha}}$$

**Propriétés :**  $z = r e^{i\alpha}$  et  $z' = r' e^{i\alpha'}$

$$\bar{z} = r e^{-i\alpha}$$

$$-z = r e^{i(\alpha + \pi)}$$

$$zz' = rr' e^{i(\alpha + \alpha')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\alpha - \alpha')}$$

$$z^n = r^n e^{in\alpha}$$

**Formules d'addition et de duplication:**

$$e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$$

$$e^{2i\alpha} = (e^{i\alpha})^2$$

**Formule de Moivre :**

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

**Formule d'Euler :**

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

**Interprétation géométrique :**

$$\text{Distance : } AB = |z_B - z_A|$$

$$\text{Angle : } (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

$$\text{Argument d'un quotient : } (\vec{v}_1, \vec{v}_1) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \quad [2\pi]$$