

## Fonction exponentielle

### Fonction exponentielle

Caractérisation : notée  $\exp$ , unique fonction  $f$  telle que :

-  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

-  $f' = f$

-  $f(0) = 1$

Signe : La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  : pour tout  $x$

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$$

Sens de variation : La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

|            |                                                                                   |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$                                                                         | $+\infty$ |
| $\exp'(x)$ | +                                                                                 |           |
| $\exp$     |  |           |

Propriétés algébriques:

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y \text{ et } x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$$

### Démonstrations BAC

Unicité : On admet l'existence de la fonction exponentielle. Montrons qu'elle est unique

Soit  $g$  une autre fonction vérifiant  $g' = g$  et  $g(0) = 1$ . Montrons que  $g = \exp$ .

On va montrer que pour tout  $x$ ,  $\frac{g(x)}{\exp(x)} = 1$  ce qui revient à dire que  $g(x) = \exp(x)$

Soit  $h(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)}$ ,  $h$  est bien définie car on a vu d'après le lemme que  $\exp(x) \neq 0$

$h$  est une fct dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp'(x)}{\exp(x)^2} = \frac{g(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

$h$  est une fonction

$$\text{constante. De plus, } h(0) = \frac{g(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Donc pour tout } x, h(x) = 1 = \frac{g(x)}{\exp(x)} \Leftrightarrow g(x) = \exp(x)$$

$e^x \geq x$  : Montrons que pour tout  $x$ ,  $e^x \geq x$ . Cela revient à montrer que  $e^x - x \geq 0$

Soit  $f(x) = e^x - x$  définie sur  $[0; +\infty[$ . On a  $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Comme  $x \geq 0$ , les inégalités précédentes sont toutes vraies. Ainsi, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) \geq 0$ . Donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$

$f(0) = e^0 - 0 = 1$ , donc  $f(x) \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $x$ ,  $e^x \geq x$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , le

théorème de minoration permet de conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Limites : Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{-x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Limites :

Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Taux d'accroissement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dérivées

$$e^{u'} = e^u \text{ et } (e^u)' = u' e^u$$

Représentation graphique de la fonction exponentielle

