Etude de fonctions

Domaine de définition : D_f, ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Courbe représentative : C_f, ensemble des points de coordonnées $x; f(x))$

Sens de variation : de la fonction f sur l'intervalle I. Soit 2 nb a et b :
- f est *croissante* sur I si pour 2 nb a, b tq $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, f conserve l'ordre sur I
- f est *décroissante* sur I si pr 2 nb a, b tq $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$, f reverse l'ordre sur I
- f est *constante* sur I si pour un 2 nb a, b alors $f(a) = f(b)$
- f est *monotone* sur I si elle est soit croissante soit décroissante

Majorants et minorants : soit M et m, deux réels
- M est un majorant de f, f est majorée par M sur I ssi pr tt x : $f(x) \leq M$
- m est un minorant de f, f est minorée par m sur I ssi pr tt x : $f(x) \geq m$

Extremum : un maximum ou un minimum

Fonctions de base :

Fonction carrée
- $f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$: ↘ sur]-∞; 0] et ↗ sur $[0; +\infty[$
- Parabole avec l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

Fonction inverse
- $f(x) = \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}$: ↘ sur]-∞; 0[et sur $]0; +\infty[$
- Hyperbole de centre O avec le centre du repère comme point de symétrie

Fonction affine
- $f(x)\ ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$: ↗ si $a > 0$ et ↘ si $a < 0$ avec $f(x) = 0$ pr $x = -\frac{b}{a}$

Fonction racine carré
- $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0\,; +\infty[$: ↗ sur $[0\,; +\infty[$
- Positions relatives :
· Pr tout $x \in]0\,;1[\,, 0 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$
· Pr tout $x \in]1; +\infty[\,, 1 < \sqrt{x} < x < x^2$

Fonction valeur absolue
- $f(x) = |x| \begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$: ↘ sur]-∞; 0] et ↗ sur $[0; +\infty[$
- Deux demi-droites, avec l'axe des ordonnées comme axe de symétrie
- Propriétés :
· $|x| = x$ si $x > 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$
· Pr tt réel x, $|x| \geq 0$
· Pr tt réel x, $|-x| = |x|$
· - $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y\ ou\ x = -y$
- Pr tt réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$

Opérations sur les fonctions et variations :
- $f + g$: si $f\ et\ g$ ont le même sens de variation sur I alors la fonction a le même sens de variation sur I
- kf avec $k > 0$: la fonction a le même sens de variation que la fct *f sur I*
- kf avec $k < 0$: la fonction a le sens de variation contraire à la fct *f sur I*
- $\frac{1}{f}$: la fct a un sens de variation contraire à la fct f, avec un signe constant et qui ne s'annule pas, sur I
- $\sqrt{f}$: la fct a le même sens de variation que la fct *f*, positive, sur I

Parité :
- $f(-x) = f(x)$: f est une fct paire, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- $f(-x) = -f(x)$: f est une fct impaire

Périodicité : f, une fct définie sur I ; T, un réel strictement positif
f est périodique de période T ssi :
- Pour tout réel x tel que $x \in I$, on a également $x + T \in I$
- Pour tout réel x appartenant à I, $f(x + T) = f(x)$

Signe de la dérivée :

Sens de variation
- f' est positive sur I, alors f est croissante sur I
- f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I
- f' est nulle sur I, alors f est constante sur I

Stricte monotonie
- f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nb fini de réels, alors f est strictement croissante sur I
- f' est négative sur I et ne s'annule qu'en un nb fini de réels, alors f est strictement décroissante sur I