

Intégration

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue, positive et a et b deux réels

Intégrale sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x)dx$, aire sous la courbe de C_f sur $[a; b]$, exprimée en unité d'aire

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Conservation de l'ordre :

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Linéarité : avec α et β deux réels positifs

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Positivité :

$$\text{Si } f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Inversion des bornes :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Valeur moyenne :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Aire entre deux courbes : $f > g$ sur $[a; b]$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

II. Primitive d'une fonction

F, primitive de f sur I : si F est dérivable sur I et admet pour dérivée f : pr tt réel x de I , $F'(x) = f(x)$; toute autre primitive de f s'écrit sous la forme $F + k$ avec k , un réel

La primitive : soit x_0 un réel et y_0 un réel, unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$

Tableau des primitives de fonctions usuelles

Expression de $f(x)$ sur I	I	Expression de $F(x)$ sur I
$f(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = k$, k constante réelle
$f(x) = 1$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = x + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$ ou $I = \mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$I = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$ ou $I = \mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + k$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + k$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + k$
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x + k$

Tableau des primitives de fonctions composées

La fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions
1 $u' \times e^u$	$e^u + k$, où k est un réel
2 $u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où k est un réel
3 $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout x de I , $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où k est un réel
4 $\frac{u'}{u}$, avec pour tout x de I , $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où k est un réel

III. Intégrales et primitives

Existence de primitives :

F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a ; b]$,

$F'(x) = f(x)$, $F(a) = 0$, donc F est l'unique primitive de f tel que $F(a) = 0$

Calculs d'intégrales à l'aide des primitives :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$